УДК 517.91: 532.2

Л. М. ТРАСКОВЕЦЬКА
Хмельницький національний університет

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ ДИНАМІКИ В ОБМЕЖЕНИХ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩАХ ІЗ СПЕКТРАЛЬНИМ ПАРАМЕТРОМ

Методом дельта-подібної послідовності запроваджено інтегральне перетворення Фур'є для обмеженого кусково-однорідного середовища в припущенні наявності спектрального параметру в умовах спряження та крайових умовах, які виконуються для реальних процесів в неоднорідних середовищах з урахуванням нестаціонарних режимів на краях та поверхнях контакту через використання спектрального параметру.

The method sequence delta-like enters integrated transformation of Furie for limited partailly-homogeneous environment in the assumption of presence of spectral parameter in the conditions of interface and regional conditions which are carried out for real processes in non-uniform structures taking into account non-stationary modes at edges and contact surfaces through use of spectral parameter.

Розглянемо на множині $I_n = \{x : x \in (l_0, l_1) \cup (l_1, l_2) \cup ... \cup (l_n, +\infty); l_0 \geq 0\}$ задачу Штурма-Ліувілля знаходження ненульового розв'зку сеператної системи диференціальних рівнянь, породжених оператором Фур'є другого порядку

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \bar{b}_j^2\right) V_j = 0, \quad \bar{b}_j^2 = \frac{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}{a_j^2}, \; j = 1, 2, ... n+1 \tag{1}$$

за крайовими умовами

$$\left[\left(\tilde{\alpha}_{11}^0 \frac{d}{dx} + \tilde{\beta}_{11}^0\right) V_1 \Big|_{x=l_0} = 0, \quad \left(\tilde{\alpha}_{22}^{n+1} \frac{d}{dx} + \tilde{\beta}_{22}^{n+1}\right) V_{n+1}\right] \Big|_{x=l_{n+1}} = 0 \tag{2}$$

та умовами спряження

$$(\tilde{a}_{j1}^k \frac{d}{dx} + \tilde{\beta}_{j1}^k) V_k - (\tilde{a}_{j2}^k \frac{d}{dx} + \beta_{j2}^k) V_{k+1} \,|_{x=l_k} = 0, \; j = 1, 2, \; k = 1, 2, ..., n. \tag{3}$$

При наявності фундаментальної системи розв'язків $\{\cos b_j x, \sin b_j x\}_{j=1}^{n+1}$, розв'язок крайової задачі (1) – (3) будуємо за правилами:

$$V_j(x, \beta) = A_j(\beta) \cos q_j x + B_j(\beta) \sin q_j x, \; j = \overline{1, n+1}. \tag{4}$$

Підставивши (4) в (2) і (3), отримаємо алгебраїчну систему з $(2n+2)$ рівнянь для визначення сталих A_j, B_j .

$$\begin{gathered}
\tilde{v}_{11}^{01}(q_1 l_0) A_1 + \tilde{v}_{11}^{02}(q_1 l_0) B_1 = 0 \\
\tilde{v}_{j1}^{k1}(q_k l_k) A_k + \tilde{v}_{j1}^{k2}(q_k l_k) B_k - \tilde{v}_{j2}^{k1}(q_{k+1} l_k) A_{k+1} - \tilde{v}_{j2}^{k2}(q_{k+1} l_k) B_{k+1} = 0, j = 1, 2; k = \overline{1, n} \\
\tilde{v}_{22}^{n+1,1}(q_{n+1} l_{n+1}) A_{n+1} + \tilde{v}_{22}^{n+1,2}(q_{n+1} l_{n+1}) B_{n+1} = 0 .
\end{gathered} \tag{5}$$

Для того, щоб алгебраїчна система (5) мала ненульовий розв'язок, необхідно і досить, щоб її визначник

$$\delta_n(\beta) \equiv -\omega_{n1}(\beta) \tilde{v}_{22}^{n+1,2}(q_{n+1} l_{n+1}) + \omega_{n2}(\beta) \tilde{v}_{22}^{n+1,1}(q_{n+1} l_{n+1}) = 0. \tag{6}$$

Оскільки $\delta_n(\beta)$ є цілою аналітичною функцією від β, то трансцендентне рівняння (6) має зліченну множину коренів, які не мають скінченної граничної точки. Корені $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n, ...$ рівняння (6) утворюють дискретний спектр: корені дійсні, прості (за винятком, можливо, нуля), симетрично розташовані відносно нуля і утворюють монотонно зростаючу послідовність з єдиною граничною точкою $\beta = +\infty$. При цьому кожному власному числу β_n відповідає власна вектор-функція

$$V(x, \beta_n) = \{V_1(x, \beta_n); V_2(x, \beta_n); ... V_{n+1}(x, \beta_n)\}.$$

Структуру функцій $V(x,\beta_n)$ одержимо, підставивши $\beta=\beta_n$ в систему (6) і відкинувши останнє рівняння, внаслідок їх лінійної залежності

Якщо позначити $A_1 \equiv A_0\omega_{02}(\beta)$, $B_1 \equiv -A_0\omega_{01}(\beta)$ і за першу компоненту власної вектор-функції, визначеної на інтервалі (l_0,l_1), взяти функцію

$$V_1(x,\beta_n)=A_0(\beta_n)\left[\omega_{02}(\beta_n)\cos q_{1n}x-\omega_{01}(\beta_n)\sin q_{1n}x\right],$$

де $q_{1n}=\dfrac{\sqrt{\beta_n^2+\gamma_1^2}}{a_1}$, то отримаємо рекурентні залежності:

$$A_{k+1}=\frac{1}{c_{21,k}q_{k+1,n}}\left[A_k\psi_{12}^k(q_{kn}l_k,q_{k+1,n}l_k)+B_k\psi_{22}^k(q_{kn}l_k,q_{k+1,n}l_k)\right],$$

$$B_{k+1}=\frac{1}{c_{21,k}q_{k+1,n}}\left[A_k\psi_{11}^k(q_{kn}l_k,q_{k+1,n}l_k)+B_k\psi_{21}^k(q_{kn}l_k,q_{k+1,n}l_k)\right],k=\overline{1,n}.$$

$$A_k=\frac{A_0}{\prod\limits_{i=1}^{k}c_{21,i}q_{i+1,n}}\omega_{k2}(\beta_n);\qquad B_{k+1}=-\frac{A_0}{\prod\limits_{i=1}^{k}c_{21,i}q_{i+1,n}}\omega_{k1}(\beta_n).\tag{7}$$

Якщо прийняти $A_0=\prod\limits_{i=1}^{n}c_{21,i}q_{i+1,n}$, то компоненти V_j спектральної вектор-функції $V(x,\beta_n)$ матимуть вигляд:

$$V_m(x,\beta_n)=A_0\left(\omega_{m-1,2}(\beta_n)\cos q_{mn}x-\omega_{m-1,1}(\beta_n)\sin q_{mn}x\right),\ m=\overline{1,n};$$

$$V_{n+1}(x,\beta_n)=\left(\omega_{n,2}(\beta_n)\cos q_{n+1,n}x-\omega_{n,1}(\beta_n)\sin q_{n+1,n}x\right),$$

а сама вектор-функція буде визначена

$$V(x,\beta_n)=\sum_{j=1}^{n+1}V_j(x,\beta_n)\theta(x-l_{j-1})\theta(l_j-x),$$

де $\theta(x)$ – одинична функція Хевісайда.

Перевіримо, що система власних вектор-функцій $\{V(x,\beta_n)\}_{n=1}^{\infty}$ ортогональна на множині I_n з ваговою функцією

$$\sigma(x)=\sum_{j=1}^{n+1}\sigma_j\theta(x-l_{j-1})\theta(l_j-x),\ де\ \sigma_k=\frac{1}{a_k^2}\prod_{m=k}^{n}\frac{c_{11,m}}{c_{21,m}};\quad \sigma_{n+1}=\frac{1}{\alpha_{n+1}^2},k=\overline{1,n}.$$

Дійсно, розглянемо дві власні вектор-функції $V(x,\beta_j)$ і $V(x,\beta_i)$, які відповідають двом власним значенням $\beta_j\neq\beta_i$. Згідно з тотожностями

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+q_{mj}^2\right)V_m(x,\beta_j)\equiv 0,\qquad \left(\frac{d^2}{dx^2}+q_{mi}^2\right)V_m(x,\beta_i)\equiv 0,\ m=\overline{1,n+1}$$

одержимо співвідношення

$$V_m(x,\beta_j)V_m(x,\beta_i)=\frac{a_m^2}{\beta_i^2-\beta_j^2}\cdot\frac{d}{dx}\left(V_m(x,\beta_i)\frac{d}{dx}V_m(x,\beta_j)-V_m(x,\beta_j)\frac{d}{dx}V_m(x,\beta_i)\right).\tag{8}$$

Помножимо рівність (8) на $\sigma_s ds$, проінтегруємо від l_0 до l_{n+1} і просумуємо по s від 1 до n+1. Одержимо рівність

$$\int_{l_0}^{l_{n+1}} V(x,\beta_j)V(x,\beta_i 0\sigma(x)dx = \sum_{m=1}^{n+1}\frac{\sigma_m a_m^2}{\beta_i^2-\beta_j^1}\left(V_m(x,\beta_i)\frac{d}{dx}V_m(x,\beta_j)-V_m(x,\beta_j)\frac{d}{dx}V_m(x,\beta_i)\right)\Bigg|_{l_{m-1}}^{l_m} =$$

$$=\frac{1}{\beta_i^2-\beta_j^2}(-\sigma_1 a_1^2\left(V_1(l_0,\beta_i)\frac{d}{dx}V_1(l_0,\beta_j)-V_1(l_0,\beta_j)\frac{d}{dx}V_1(l_0,\beta_i)\right)+$$

$$+\left(V_{n+1}(l_{n+1},\beta_i)\frac{d}{dx}V_{n+1}(l_{n+1},\beta_j)-V_{n+1}(l_{n+1},\beta_j)\frac{d}{dx}V_{n+1}(l_{n+1},\beta_i)\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}[\sigma_k a_k^2\left(V_k(x,\beta_i)V_k'(x,\beta_j)-V_k(x,\beta_j)V_k'(x,\beta_i)\right)-$$
$$-\sigma_k a_{k+1}^2\left(V_{k+1}(x,\beta_i)V_{k+1}'(x,\beta_j)-V_{k+1}(x,\beta_j)V_{k+1}'(x,\beta_i)\right)]\big|_{x=l_k}). \qquad (9)$$

Виконавши елементарні перетворення, отримаємо:

$$\int_{l_0}^{l_{n+1}} V(x,\beta_i)V(x,\beta_j)\sigma(x)dx = -\frac{\sigma_1 a_1^2}{\alpha_{11}^0\gamma_{11}^0+\delta_{11}^0\beta_{11}^0}\left[\delta_{11}^0 V_1'(l_0,\beta_i)+\gamma_{11}^0 V_1(l_0,\beta_i)\right]\times$$

$$\times\left[\delta_{11}^0 V_1'(l_0,\beta_j)+\gamma_{11}^0 V_1(l_0,\beta_j)\right]-\frac{a_{n+1}^2\sigma_{n+1}}{-\delta_{22}^{n+1}\beta_{22}^{n+1}+\alpha_{22}^{n+1}\gamma_{22}^{n+1}}\left[\delta_{22}^{n+1}V_{n+1}'(l_{n+1},\beta_i)+\gamma_{22}^{n+1}V_{n+1}(l_{n+1},\beta_i)\right]\times$$

$$\times\left[\delta_{22}^{n-1}V_{n+1}'(l_{n+1},\beta_j)+\gamma_{22}^{n+1}V_{n+1}(l_{n+1},\beta_j)\right]-G_n(\beta_i,\beta_j)\equiv -G_n^{(1)}(\beta_i,\beta_j). \qquad (10)$$

Якщо визначити узагальнений скалярний добуток

$$\left(V(x,\beta_i),V(x,\beta_j)\right)_1 = \int_{l_0}^{l_{n+1}} V(x,\beta_i)V(x,\beta_j)\sigma(x)dx + G_n^{(1)}(\beta_i,\beta_j), \qquad (11)$$

то з рівності (10) випливає, що для всіх $\beta_i \neq \beta_j$

$$\left(V(x,\beta_i),V(x,\beta_j)\right)_1 = 0.$$

Остання рівність означає, що система власних вектор-функцій $\{V(x,\beta_n)\}_{n=1}^{\infty}$ узагальнено ортогональна на множині I_n з ваговою функцією $\sigma(x)$.

Рівність (11) породжує квадрат норми власної функції $V(x,\beta_j)$

$$\|V(x,\beta_j)\|_1^2 = \|V(x,\beta_j)\|^2 + G_n^{(1)}(\beta_j,\beta_j).$$

Можна показати, що узагальнено ортогональна на множині I_n система власних вектор-функцій $\{V(x,\beta_n)\}_{n=1}^{\infty}$ повна і замкнута.

Справедлива теорема типу Стєклова.

Теорема. Будь-яка неперервно-диференційовна до третього порядку включно на множині I_n вектор-функція $f(x)$, яка задовольняє крайові умови (2) та умови спряження (3), зображається на кожній підмножині множини I_n абсолютно й рівномірно збіжним рядом Фур'є за системою власних вектор-функцій $\{V(x,\beta_n)\}_{n=1}^{\infty}$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{l_0}^{l_{n+1}} f(\xi)V(\xi,\beta_n)\sigma(\xi)d\xi\frac{V(x,\beta_n)}{\|V(x,\beta_n)\|_1^2}. \qquad (12)$$

Ряд Фур'є породжує пряме F_n й обернене F_n^{-1} інтегральні перетворення Фур'є зі спектральним параметром на $(n+1)$-шаровому сегменті:

$$F_n\left[f(x)\right] = \int_{l_0}^{l_{n+1}} f(x)V(x,\beta_n)\sigma(x)dx \equiv f_n, \qquad (13)$$

$$F_n^{-1}\left[f_n\right]=\sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{V(x,\beta_n)}{\left\|V(x,\beta_n)\right\|_1^2}\equiv f(x). \tag{14}$$

З метою застосування запровадженого інтегрального перетворення Фур'є для знаходження аналітичних розв'язків математичних моделей задач сформулюємо основну тотожність інтегрального перетворення.

Теорема 2 (про основну тотожність): Якщо вектор-функція $f(x)\in C^{(3)}(I_n^+)$ задовольняє крайові умови

$$\left(\tilde{\alpha}_{11}^0 \frac{d}{dx}+\tilde{\beta}_{11}^0\right) f_1(x)\Big|_{x=l_0}=f_{10}, \qquad \left(\tilde{\alpha}_{22}^{n+1} \frac{d}{dx}+\tilde{\beta}_{22}^{n+1}\right) f_{n+1}(x)\Big|_{x=l_{n+1}}=f_{n+1,l} \tag{15}$$

і умови спряження (3), то справджується основна тотожність інтегрального перетворення диференціального оператора G_n:

$$F\left[G_n\left[f(x)\right]\right]=-\beta_n^2 f_n-\sigma_1 a_1^2 (\tilde{\alpha}_{11}^0)^{-1} V_1(l_0,\beta_n) f_{10}-\sum_{j=1}^{n+1} k_j^2 \int_{l_{j-1}}^{l_j} f_j(x) V_j(x,\beta_n)\sigma_j dx+\frac{V_{n+1}(l,\beta_n) f_{n+1,l}}{\tilde{\alpha}_{22}^{n+1}}. \tag{16}$$

Доведення. З умов спряження встановимо базову тотожність

$$\left[f_k(x)V_k'(x,\beta_n)-f_k'(x)V_k(x,\beta_n)\right]\Big|_{x=l_k}=\frac{c_{21,k}}{c_{11,k}}\left[f_{k+1}(x)V_{k+1}'(x,\beta_n)-f_{k+1}'(x)V_{k+1}(x,\beta_n)\right]\Big|_{x=l_k} \quad k=\overline{1,n}.$$

Якщо інтеграл в правій частині рівності (16) проінтегрувати двічі частинами, то одержимо:

$$\begin{aligned} F\left[G_n\left[f(x)\right]\right] &\equiv \sum_{j=1}^{n+1} a_j^2 \int_{l_{j-1}}^{l_j} \frac{d^2 f_j(x)}{dx^2} V_j(x,\beta_n)\sigma_j dx=\sum_{j=1}^{n+1} a_j^2\sigma_1 \left(f_j'V_j-f_jV_j'\right)\Bigg|_{l_{j-1}}^{l_j}+\sum_{j=1}^{n+1}\int_{l_{j-1}}^{l_j} f_j(a_j^2\frac{d^2}{dx^2}V_j)\sigma_j dx= \\ &=-a_1^2\sigma_1(f_1'V_1-f_1V_1')\big|_{l_0}+(f_{n+1}'V_{n+1}-f_{n+1}V_{n+1}')\big|_{l_{n+1}}+\sum_{j=1}^{3}\int_{l_{j-1}}^{l_j} f_j(x)V_j(x,\beta_n)\left(-a_j^2\frac{\beta_n^2+\gamma_j^2}{\alpha_j^2}\right)\sigma_j dx. \end{aligned} \tag{15}$$

Розклавши суму на два доданки, отримаємо тотожність (16).

Тотожність (16) дає можливість будувати точні аналітичні розв'язки математичних моделей задач квазістатистики і динаміки для обмеженого n-складового неоднорідного середовища.

Розглянемо задачу динаміки, що полягає в побудові обмеженого в області D_n розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними 2-го порядку гіперболічного типу для обмеженого *n*-складового неоднорідного середовища з урахуванням нестаціонарності на лініях розділу $x=l_j,\ j=\overline{0,n}$.

$$\frac{\partial^2 T_j}{\partial t^2}+\chi_j^2 T_j-a_j^2\frac{\partial^2 T_j}{\partial x^2}=f_j(t,x), \quad x\in(l_{j-1},l_j), \quad j=\overline{1,n+1} \tag{17}$$

за початковими умовами

$$T_j(t,x)\big|_{t=0}=q_{1j}(x); \qquad \frac{\partial T_j}{\partial t}\Big|_{t=0}=q_{2j}(x), \quad j=\overline{1,n+1}, \tag{18}$$

крайовими умовами

$$\left[\left(\alpha_{11}^0+\delta_{11}^0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{\partial}{\partial x}+\beta_{11}^0+\gamma_{11}^0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]T_1(t,x)\big|_{x=l_0}=\omega_0(t), \tag{19}$$

$$\left[\left(\alpha_{22}^{n+1}+\delta_{22}^{n+1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{\partial}{\partial x}+\beta_{22}^{n+1}+\gamma_{22}^{n+1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]T_{n+1}(t,x)\big|_{x=l_{n+1}}=\omega_{n+1}(t) \tag{20}$$

та умовами спряження

$$\{T_k(t,x)\left[\left(\alpha_{j1}^k+\delta_{j1}^k\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{\partial}{\partial x}+\beta_{j1}^k+\gamma_{j1}^k\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]- \\ -T_{k-1}(t,x)\left[\left(\alpha_{j2}^k+\delta_{j2}^k\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{\partial}{\partial x}+\beta_{j2}^k+\gamma_{j2}^k\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\}|_{x=l_k}\ \omega_{jk}(t); \qquad j=1,2;\ k=\overline{1,n}. \tag{21}$$

Внаслідок основної тотожності (16), одержимо єдиний розв'язок гіперболічної задачі (17) – (21):

$$T_j(t,x)=\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^t\int_{l_{k-1}}^{l_k}\Re_{jk}(t-\tau,x,\xi)[f_k(\tau,\xi)+q_{2k}(\xi)\delta_+(\tau)]\sigma_k d\xi d\tau+ \\ +\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\partial}{\partial t}\int_{l_{k-1}}^{l_k}\Re_{jk}(t,x,\xi)q_{1k}(\xi)\sigma_k d\xi+\int_0^t\left[W_{0j}(t-\tau,x)w_0(\tau)+W_{n+1,j}(t-\tau,x)w_{n+1}(\tau)\right]d\tau+ \\ +\sum_{k=1}^{n}\int_0^t\left[\Re_{jk}^1(t-\tau,x)w_{1k}(\tau)+\Re_{jk}^2(t-\tau,x)w_{2k}(\tau)\right]d\tau,\quad j=\overline{1,n+1}. \tag{22}$$

Зауважимо, що при $\delta_{jm}^k=0$, $\gamma_{jm}^k=0$ безпосередньо отримуємо випадок стаціонарного режиму теплообміну на поверхнях без врахування в крайових умовах швидкостей зміни параметрів градієнтних полів.

За вказаною схемою можна знаходити розв'язки складніших задач квазістатистики та динаміки, що приводяться до даних математичних моделей.

Список використаних джерел

1. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Шилов Г. Е. – М. : Наука, 1965. – 328 с.
2. Ленюк М. П. Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя. – К. , 1983. – 62 с. – (Препринт / АНУССР. Ин-т математики ; 83.3).
3. Ленюк М. П. Гибридные интегральные преобразования Ханкеля 1-го рода на сегменте с двумя точками сопряжения / М. П. Ленюк, Л. М. Трасковецкая / Хмельниц. технол. ин-т быт. обслуж. – Хмельницкий , 1989. – 23 с. – Рус. – Деп. в Укр НИИНТ, № 384-Ук89.
4. Трасковецька Л. М. Інтегральне перетворення Фур'є із спектральним параметром для напівобмеженого трискладового середовища / Л. М. Трасковецька // Збірник наукових праць ФПМКТ ХНУ. – 2008. – № 1. – С. 40 – 42.
5. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1972. – 735 с.
6. Лаврентьев М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М. : Наука, 1973. – 746 с.
7. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / Степанов В. В. – М. : Физматиз, 1959. – 468 с.